

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$$

# 组合数、递推序列 与同余式

Binomial Coefficients,  
Recurrence Sequences and Congruences

孙智宏 著



科学出版社

# 组合数、递推序列与同余式

## **Binomial Coefficients, Recurrence Sequences and Congruences**

孙智宏 著

国家自然科学基金面上项目资助（项目号：12271200）

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书旨在展现数学魅力和作者研究成果,内容分为两部分:第一部分为基础知识,以高中数学为起点,通俗易懂地介绍经典不等式、抽屉原理、素数与算术基本定理、组合数与组合恒等式、同余概念与性质以及代数方程;第二部分为较高级知识,由浅入深地介绍连分数、同余覆盖系、二次互反律、二元二次型、Chebyshev 多项式、Legendre 多项式、分拆数、线性递推序列、组合数等距求和、不变序列、Stirling 数、Bernoulli 数、 $p$ -正则函数、三(四)次同余式、二项式系数同余式、类似 Apéry 数、差集和群的概念等美妙知识,其中包含了作者的许多相关成果.此外,第一讲介绍数学的本性和特点,最后的附录介绍数学英雄 Euler.

本书适合高中生、大学生、数学爱好者和数论工作者阅读,对读者提高数学认识、学习和研究数论大有裨益.

---

### 图书在版编目(CIP)数据

组合数、递推序列与同余式 / 孙智宏著. — 北京:科学出版社, 2025.  
6. — ISBN 978-7-03-079665-3

I. O1-05

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024ZR7438 号

---

责任编辑:胡庆家 李 萍 / 责任校对:彭珍珍

责任印制:张 伟 / 封面设计:无极书装

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2025 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2025 年 6 月第一次印刷 印张:27 1/2

字数:553 000

定价:168.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 作者简介

孙智宏, 男, 1965 年出生, 淮阴师范学院数学与统计学院教师, 江苏省二级教授, 曾获“全国师范院校曾宪梓教师奖”(1999), “全国优秀教师”(2007), “江苏省师德模范”(2000), “江苏省大学生最喜爱的教师”(2011)等荣誉称号, 在数论、图论与组合数学研究中取得了丰硕成果, 特别彻底解决了三、四次剩余中长期悬而未决的几个难题. 在国际核心刊物 SCI 杂志发表论文 80 篇, 其中 69 篇 SCI 论文为独立发表, 出版《数和数列》《数学史和数学方法论》等著作, 并四次获得国家自然科学基金面上项目资助. 其个人主页网址为 <http://maths.hyt.edu.cn/szh.htm>.

# 前言

本书以高中数学为起点,用通俗易懂和相对初等的方法介绍了数学中的若干论题,内容涉及数学的本性和特点、经典不等式、组合数性质、抽屉原理、代数方程、连分数、同余式、二次互反律、Lucas 序列、Stirling 数、Ramsey 数、分拆数、Chebyshev 多项式、Legendre 多项式、差集、对称设计、群的概念和性质,以及作者作出贡献的不变序列与反不变序列、Bernoulli 数与 Euler 数、高阶递推序列、三(四)次同余式、组合数等距求和、 $p$ -正则函数、二元二次型、二项式系数同余式和类似 Apéry 数等课题.

本书旨在充分展现数学魅力,引导高中生、大学生、数学爱好者更加热爱数学,走上数学研究之路,为此放弃了所有高深和复杂的内容.同时,本书总结和展现了作者的相关研究成果,包括已经发表和本书首次出版的许多定理和猜想(如定理 8.8、定理 18.21、定理 20.11、定理 21.44、定理 22.44 和猜想 22.35 等).特别综述了现在的热点课题“二项式系数同余式”和“类似 Apéry 数”.这对从事组合数学和数论研究的同行也极有参考价值.

阅读本书不需要高深的数学知识,中学生也可看懂大部分内容.如果读者熟悉求导、幂级数和母函数,那就几乎没有阅读困难.积分只在 Chebyshev 多项式与 Legendre 多项式中出现,矩阵和行列式的简单知识只在同余覆盖系一个定理证明、高阶递推序列与对称设计中用到.群的观念也只在最后三讲中涉及.

感谢我的学生李桂林、李龙、赵媛媛、庄原、王妍、周煦帮助检查部分书稿内容.限于时间、篇幅及作者知识面,书中所列文献不够全面.欢迎广大读者来信讨论和指正.

孙智宏

2024 年 11 月

# 目 录

前言

常用记号

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 第 1 讲 数学是什么 .....                 | 1  |
| 1.1 数学的本性 .....                   | 1  |
| 1.2 数学的特点 .....                   | 2  |
| 参考读物 .....                        | 4  |
| 第 2 讲 经典不等式 .....                 | 5  |
| 参考读物 .....                        | 12 |
| 第 3 讲 抽屉原理与 Ramsey 定理 .....       | 13 |
| 3.1 抽屉原理 .....                    | 13 |
| 3.2 Ramsey 数 $R(n, k)$ .....      | 15 |
| 参考读物 .....                        | 18 |
| 第 4 讲 组合数与组合恒等式 .....             | 19 |
| 参考读物 .....                        | 28 |
| 第 5 讲 连分数与 Pell 方程 .....          | 29 |
| 5.1 辗转相除法 .....                   | 29 |
| 5.2 有限连分数 .....                   | 30 |
| 5.3 无限连分数 .....                   | 32 |
| 5.4 循环连分数 .....                   | 39 |
| 5.5 $\sqrt{d}$ 连分数与 Pell 方程 ..... | 43 |
| 参考读物 .....                        | 49 |
| 第 6 讲 代数方程 .....                  | 50 |
| 参考读物 .....                        | 60 |
| 第 7 讲 素数与同余方程 .....               | 61 |
| 7.1 素数 .....                      | 61 |
| 7.2 同余概念与性质 .....                 | 64 |
| 7.3 Fermat 小定理和 Wilson 定理 .....   | 65 |
| 7.4 同余方程 .....                    | 67 |
| 参考读物 .....                        | 68 |

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 第 8 讲 同余覆盖系                             | 69  |
| 参考读物                                    | 78  |
| 第 9 讲 二次互反律                             | 79  |
| 参考读物                                    | 86  |
| 第 10 讲 Chebyshev 多项式                    | 87  |
| 参考读物                                    | 92  |
| 第 11 讲 Legendre 多项式                     | 93  |
| 参考读物                                    | 101 |
| 第 12 讲 $\sin x$ 的无穷乘积公式                 | 102 |
| 参考读物                                    | 106 |
| 第 13 讲 二元二次型                            | 107 |
| 参考读物                                    | 122 |
| 第 14 讲 分拆数与因子和                          | 123 |
| 参考读物                                    | 132 |
| 第 15 讲 Stirling 数                       | 133 |
| 参考读物                                    | 148 |
| 第 16 讲 $p$ -正则函数                        | 149 |
| 参考读物                                    | 157 |
| 第 17 讲 Bernoulli 数与 Euler 数             | 158 |
| 17.1 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式         | 158 |
| 17.2 Euler 数与 Euler 多项式                 | 170 |
| 参考读物                                    | 177 |
| 第 18 讲 线性递推序列与三、四次同余式                   | 179 |
| 18.1 高阶递推序列                             | 179 |
| 18.2 Lucas 序列                           | 185 |
| 18.3 三、四次同余式                            | 190 |
| 参考读物                                    | 199 |
| 第 19 讲 组合数等距求和公式及其应用                    | 201 |
| 19.1 $T_{r(3)}^n$ 与 $T_{r(4)}^n$ 公式及其应用 | 201 |
| 19.2 $T_{r(5)}^n$ 与 $T_{r(6)}^n$ 公式     | 206 |
| 19.3 $S_r(n)$ 递推关系与 $T_{r(9)}^n$ 公式     | 211 |
| 19.4 $T_{r(8)}^n$ 公式与 Pell 数同余式         | 218 |
| 19.5 $T_{r(10)}^n$ 公式与 Fibonacci 数同余式   | 223 |
| 19.6 $T_{r(12)}^n$ 公式                   | 231 |
| 19.7 与 $T_{r(m)}^n$ 有关的同余式              | 234 |
| 参考读物                                    | 236 |

|        |                                    |     |
|--------|------------------------------------|-----|
| 第 20 讲 | 不变序列与反不变序列                         | 237 |
| 20.1   | 不变序列例子与转换关系                        | 237 |
| 20.2   | 不变序列的递推关系                          | 249 |
| 20.3   | 不变序列的变换公式                          | 259 |
| 20.4   | 不变序列的同余式                           | 263 |
|        | 参考读物                               | 267 |
| 第 21 讲 | 二项式系数的同余式                          | 268 |
| 21.1   | 单个二项式系数和的同余式                       | 268 |
| 21.2   | 两个二项式系数乘积之和的同余式                    | 281 |
| 21.3   | 三个二项式系数乘积之和的同余式                    | 308 |
|        | 参考读物                               | 325 |
| 第 22 讲 | 类似 Apéry 数                         | 328 |
| 22.1   | 三项递推序列的恒等式与同余式                     | 328 |
| 22.2   | 第一类 Apéry-like 数                   | 332 |
| 22.3   | 第二类 Apéry-like 数                   | 365 |
|        | 参考读物                               | 390 |
| 第 23 讲 | 群的概念与性质                            | 395 |
| 23.1   | 群的定义与例                             | 395 |
| 23.2   | 陪集与 Lagrange 定理                    | 399 |
| 23.3   | 子群与正规子群                            | 401 |
| 23.4   | 群的同构                               | 403 |
|        | 参考读物                               | 404 |
| 第 24 讲 | 三、四次剩余                             | 405 |
| 24.1   | Euler 与 Gauss 关于三、四次剩余的工作          | 405 |
| 24.2   | 三次互反律及其优先权争论                       | 407 |
| 24.3   | Dirichlet, Scholz 和 Burde 的有理四次互反律 | 409 |
| 24.4   | 用群表述的有理三、四次互反律                     | 410 |
| 24.5   | 用二元二次型判别三、四次剩余                     | 413 |
|        | 参考读物                               | 414 |
| 第 25 讲 | 对称设计与差集                            | 416 |
| 25.1   | 对称设计                               | 416 |
| 25.2   | 差集                                 | 419 |
|        | 参考读物                               | 422 |
| 附录     | 数学英雄 Euler                         | 423 |
|        | 参考读物                               | 427 |

(SCPC-BZBEZF05-0019)



# 组合数、递推序列 与同余式

Binomial Coefficients,  
Recurrence Sequences and Congruences



科学出版社微信公众号

科学数理分社: (010) 64001244 销售: (010) 64031535

E-mail: huqingjia@mail.sciencep.com

销售分类建议: 高等数学

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-079665-3



9 787030 796653 >

定 价: 168.00 元