华林问题

孙智宏

1. 四整数平方和定理

四平方和定理　每个自然数都是四个整数的平方和。

例：　$5=1^2+2^2+0^2+0^2,\ 7=1^2+1^2+1^2+2^2,\ 15=1^2+1^2+2^2+3^2$ 。

十七世纪：　1621 年 Bachet（巴切特）验证 $n\le 325$, Fermat(费尔马) 断言可用递降法证明， Descartes(笛卡尔) 宣称命题无疑是正确的，但实在太难了，以致他不敢去找证明。

十八世纪：　Euler 努力了 40 年（ 1730 − 1770 ），接近成功； 1770 年 Lagrange (拉格朗日) 补出 Euler 的最后一步，完成证明。

十九世纪：　设 $r(n)$ 为 n 表为四整数平方和的方法数， 1828 年 Jacobi(雅可比) 利用椭圆函数论证明

$$r(n)=8\sum_{\substack{d\mid n\\ 4\nmid d}} d.$$

2. Waring(华林) 问题

1770 年华林在《代数沉思录》中写道：每一自然数是四个整数平方之和，九个非负整数立方之和，十九个非负整数四次方之和。一般地，存在仅依赖于 k 的最小自然数 $g(k)$, 使得每一自然数可表为 $g(k)$ 个非负整数的 k 次幂之和，即对每个自然数 n 有 $n=x_1^k+\cdots+x_{g(k)}^k$, 其中 $x_1,\ldots,x_{g(k)}$ 为非负整数。

例：　四平方和定理（ Lagrange 定理) 表明 $g(2)=4$ 。

1909 年 Hilbert 用复杂的分析方法 (多重积分) 证明了 $g(k)$ 的存在性。

1914 年 Hardy(哈代) 与 Littlewood(李特伍德) 使用圆法 (无穷级数) 简化了 Hilbert 的证明，并对 $g(k)$ 上界得出较好的估计。

1924 年 Vinogradov（维诺格拉陀夫）利用三角和方法 (有限和) 获得华林问题的简单证明。

1936 年 Dickson（狄克森）与 Pillai（皮莱）通过提炼维诺格拉陀夫方法得出如下惊人结果：对 $k\in\{6,7,\ldots,20000\}$ 及一切充分大的 k 有 $g(k)=2^k-2+[(\frac{3}{2})^k]$, 这儿 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

Dickson 猜想　当 k 为自然数时恒有

$$g(k)=2^k-2+[(\frac{3}{2})^k].$$

由此 $g(2)=4,\ g(3)=9,\ g(4)=19,\ g(5)=37.$

1909 年 Wieferich（外什力非）证明 $g(3)=9$ 。

1964 年陈景润证明 g(5)=37 。

1986 年 Balasubramanian（巴拉苏不拉马连）, Deshouillers（戴舍尔）, Dress（德莱斯）证明 $g(4) = 19$ 。