南京大学学报数学半年刊
第12卷 第2期 JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY Vol. 12, No. 2
1995年11月 MATHEMATICAL BIQUARTERLY Nov, 1995

关于二项反演公式的补充*

孙智宏
(淮阴师范专科学校, 223001)

摘 要 设$\{B_n\}$、$\{S(n,k)\}$分别表示 Bernoulli 数与第二类 Stirling 数,本文证明了如下反演公式:

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f(n)=\begin{cases}-\sum\limits_{m=0}^{n}\binom{n}{m}F(m)\sum\limits_{k=0}^{n-m}\dfrac{k!S(n-m,k)}{(\lambda-1)^{k+1}} & \text{当 } \lambda\neq 1 \text{ 时},\\ \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}F(k)B_{n+1-k} & \text{当 } \lambda=1 \text{ 时}\end{cases}$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

关键词 Bernoulli 数, Stirling 数,反演公式.

分类号 O157.1

1 Bernoulli 数与 Stirling 数

古典的二项互反公式指出:

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}F(k)\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

设λ为复数, $F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$,本文考虑此种类型的互反公式,即如何由$\{F(k)\}$确定$\{f(n)\}$.

为达到上述目的,我们需 Bernoulli 数$\{B_n\}$和第二类 Stirling 数$S(n,k)$的一些预备知识.

Bernoulli 数$\{B_n\}$定义为$B_0=1$, $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$ $(n\geqslant 2)$. 熟知$B_{2m+1}=0$ $(m=1,2,3,$

* 收稿日期:1994-05-07.

…). 令 $B_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k$ 为 Bernoulli 多项式,则由[1,p. 90] 知 $B_n\left(\frac{1}{2}\right)=(2^{1-n}-1)B_n$(当 n 为奇数时两端皆为零).

引理 1 设 $a_n=(2^n-1)B_n$, 则$\{a_n\}$由如下初值和递推关系决定:

$$a_0=0,\quad a_1=-\frac{1}{2},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=-a_n(n=2,3,4,\cdots).$$

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^k-1)B_k&=2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}B_k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\\&=2^nB_n\left(\frac{1}{2}\right)-B_n=2^n(2^{1-n}-1)B_n-B_n\\&=(1-2^n)B_n\end{aligned}$$

$$(n=2,3,\cdots).$$

现在我们转而讨论第二类 Stirling 数 $S(n,k)$.

设 $n\geqslant k\geqslant 0$, Stirling 数 $S(n,k)$表示 n 个物件划分成 k 类的方法数,它也可由下式定义:

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)x(x-1)\cdots(x-k+1).$$

熟知(参见[2,p. 55])$S(n,k)$有如下的显式表达式:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-1)^{k-r}r^n.$$

由[3,p. 234—235]知 $S(n,k)$满足如下"三角形"与"垂直"递推关系:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k),\tag{1.1}$$

$$S(n,k)=\sum_{k-1\leqslant r\leqslant n-1}\binom{n-1}{r}S(r,k-1).\tag{1.2}$$

引理 2 设 $\lambda\neq 1$, $n\geqslant 2$ 为自然数,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(S(n,k+1)-\lambda S(n-1,k))}{(\lambda-1)^{k+1}}=0.$$

证明 令 $x=\frac{1}{\lambda-1}$, 则 $\lambda=1+\frac{1}{x}$. 于是

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(S(n,k+1)-\lambda S(n-1,k))}{(\lambda-1)^{k+1}}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}k!x^{k+1}(S(n,k+1)-(1+\frac{1}{x})S(n-1,k))\\&=\sum_{k=0}^{n-1}k!x^{k+1}((k+1)S(n-1,k+1)-\frac{1}{x}S(n-1,k))\\&=\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)!x^{k+1}\cdot S(n-1,k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}k!x^k\cdot S(n-1,k)\\&=0.\end{aligned}$$

引理得证.

作为本节的结束，我们指出$\{B_n\}$同$\{S(n,k)\}$的如下关系（参见[3,p. 249]）：

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k! S(n,k)}{k+1} \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

2. $\lambda=1$ 的反演公式及其应用

定理 1 设$\{B_n\}$为 Bernoulli 数，则有如下互反公式：

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) - f(n), \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f(n-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F(k) B_{n-k}, \quad (n = 1,2,3\cdots).$$

证明 设 $F(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) - f(n)$，注意到

$$\sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} B_s = \begin{cases} B_m & 当 m \neq 1 时, \\ B_1 + 1 & 当 m = 1 时. \end{cases}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F(k) B_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} f(r) - f(k) \right) B_{n-k} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sum_{r \leqslant k \leqslant n} \binom{n-r}{k-r} B_{n-k} f(r) - \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f(r) B_{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f(r) \sum_{s=0}^{n-r} \binom{n-r}{s} B_{n-r-s} - \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f(r) B_{n-r} \\
&= \binom{n}{n-1} f(n-1) = n f(n-1), \quad (n = 1,2,3,\cdots).
\end{aligned}$$

反之，若 $f(n-1) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F(k) B_{n-k}$，则 $n \geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) - f(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_{k+1-r} F(r) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_{k+1-r} F(r) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} \sum_{r \leqslant k+1 \leqslant n} \binom{n+1-r}{k+1-r} B_{k+1-r} F(r) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{n+1-r}{s} B_s F(r) \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n} \cdot 1 \cdot F(n) = F(n).
\end{aligned}$$

定理获证．

定理 1 揭示了 Bernoulli 数的组合特征，它实质上提供了关于$\{B_n\}$的无穷多个递推关系，即有

定理 1′　设 f 为定义在非负整数集上的任一函数，$\{B_n\}$表 Bernoulli 数，则 $n\geq 1$ 时恒有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f(r)-f(k)\right)B_{n-k}=nf(n-1).$$

令 $F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\quad(n\geq 1)$ 为 Fibonacci 数列，则熟知

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

由此不难证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kF_k=-F_n, \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n}. \tag{2.2}$$

现在作为定理 1′的应用，我们有

推论 1　设 n 为正偶数，则

(i)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_kB_{n-k}=0,$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{2k}B_{n-k}=nF_{n-1}.$

证明　(i) 由(2.1)式知 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^kF_k=\begin{cases}-2F_n & \text{当 } 2\mid n \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } 2\nmid n \text{ 时},\end{cases}$ 故据定理 1′ 有

$$\sum_{\substack{k=0\\2\mid k}}^{n}\binom{n}{k}(-2F_k)B_{n-k}=n(-1)^{n-1}F_{n-1}.$$

注意到 $B_1=-\frac{1}{2},\ B_{2m+1}=0\quad(m\geq 1)$　便知 n 为正偶数时

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_kB_{n-k}=\sum_{\substack{k=0\\2\mid k}}^{n}\binom{n}{k}F_kB_{n-k}+\binom{n}{n-1}F_{n-1}B_1$$
$$=\frac{n(-1)^n}{2}F_{n-1}+nF_{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

(ii)　由(2.2)式和定理 1′知

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(F_{2k}-F_k)B_{n-k}=nF_{n-1}.$$

由此利用(i)得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{2k}B_{n-k}=nF_{n-1}.$$

证毕．

记 L_n 表示如下定义的 Lucas 序列：

$$L_0=2,\ L_1=1,\ L_{n+1}=L_n+L_{n-1}\quad(n\geq 1),$$

则熟知

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=2F_{n+1}-F_n.$$

由此不难证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k L_k=L_n. \tag{2.3}$$

推论 2 设 n 为正奇数，则

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k B_{n-k}=0.$$

证明 在定理 1′ 中取 $f(k)=(-1)^k L_k$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(L_k-(-1)^k L_k)B_{n-k}=n(-1)^{n-1}L_{n-1}$$

即

$$\sum_{\substack{k=0\\ 2\nmid k}}^{n}\binom{n}{k}L_k B_{n-k}=\frac{n(-1)^{n-1}L_{n-1}}{2}.$$

由此 n 为奇数时

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k B_{n-k}=\sum_{\substack{k=0\\ 2\nmid k}}^{n}\binom{n}{k}L_k B_{n-k}+\binom{n}{n-1}L_{n-1}B_1=0.$$

于是推论得证.

3 一般情形的反演公式

为讨论反演公式的需要，我们引入序列 $\{a_n(\lambda)\}$.

定义 1 设 $\lambda\neq 0$ 为复数，定义 $a_n=a_n(\lambda)$ 为

$$a_0=\begin{cases}0 & \text{当 } \lambda\neq 1 \text{ 时}\\ 1 & \text{当 } \lambda=1 \text{ 时}\end{cases},\quad a_1=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1-\lambda} & \text{当 } \lambda\neq 1 \text{ 时}\\ -\dfrac{1}{2} & \text{当 } \lambda=1 \text{ 时},\end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=\lambda a_n \quad (n=2,3,4,\cdots).$$

据此定义我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(\lambda)=\lambda a_n(\lambda)+\lambda ct(n=1),$$

其中

$$ct(n=1)=\begin{cases}1 & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

由定义 1 易见

$$a_n(1)=B_n,\quad a_n(-1)=(2^n-1)B_n.$$

现在我们给出如下反演公式.

定理 2 设 $\lambda\neq 0,1$，$\{a_n(\lambda)\}$ 由定义 1 确定，则

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f(n-1)=\frac{1}{n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(\lambda)F(k)\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

证明　设 $F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)$，则 $n\geqslant 1$ 时

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(\lambda)F(k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f(r)-\lambda f(k)\right)a_{n-k}(\lambda)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{r}f(r)a_{n-k}(\lambda)-\lambda\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)a_{n-k}(\lambda)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f(r)\sum_{r\leqslant k\leqslant n}\binom{n-r}{k-r}a_{n-k}(\lambda)-\lambda\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f(r)a_{n-r}(\lambda)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f(r)\left(\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}a_{n-r-s}(\lambda)-\lambda a_{n-r}(\lambda)\right)$$

$$=\binom{n}{n-1}f(n-1)\cdot\lambda=n\lambda f(n-1).$$

反之，若 $f(n-1)=\frac{1}{n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(\lambda)F(k)\ (n=1,2,3\cdots)$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(k+1)\lambda}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a_{k+1-r}(\lambda)F(r)$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a_{n+1-r}(\lambda)F(r)$$

$$=\frac{1}{(n+1)\lambda}\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{n+1}{r}\binom{n+1-r}{k+1-r}a_{k+1-r}(\lambda)F(r)$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a_{n+1-r}(\lambda)F(r)$$

$$=\frac{1}{(n+1)\lambda}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}\left(\sum_{r-1\leqslant k\leqslant n}\binom{n+1-r}{k+1-r}\cdot a_{k+1-r}(\lambda)\right.$$

$$\left.-\lambda a_{n+1-r}(\lambda)\right)F(r)$$

$$=\frac{1}{(n+1)\lambda}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}F(r)ct(n+1-r=1)\cdot\lambda$$

$$=F(n)\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

定理获证.

由引理 1 知 $a_n(-1)=(2^n-1)B_n$，故我们有

推论 3　设 $\{B_n\}$ 为 Bernoulli 数，则

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)+f(n)\quad(n=0,1,2\cdots)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(n-1)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-2^{n-k})B_{n-k}F(k)$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

现在我们来确定 $\lambda\neq 0,1$ 时 $a_n(\lambda)$ 的表达式.

命题 1 设 $\lambda\neq 0,1$, $a_n(\lambda)$ 由定义 1 确定,则

$$a_n(\lambda)=-n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!S(n-1,k)}{(\lambda-1)^{k+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

证明 当 $n=0,1$ 时公式显然正确. 现设 $n\geqslant 2$,则有

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-m\lambda)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!S(m-1,k)}{(\lambda-1)^{k+1}}$$

$$=-n\lambda\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k!S(m-1,k)}{(\lambda-1)^{k+1}}$$

$$=-n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{(\lambda-1)^{k+1}}\sum_{k+1\leqslant m\leqslant n}\binom{n-1}{m-1}S(m-1,k)$$

$$=-n\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{(\lambda-1)^{k+1}}S(n,k+1)\quad\text{(利用(1.2)式)}$$

$$=\lambda\cdot(-n\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!S(n-1,k)}{(\lambda-1)^{k+1}}\qquad\text{(根据引理 2)},$$

故按定义 1 即知命题正确.

限于篇幅,我们再不加证明地给出 $a_n(\lambda)(\lambda\neq 0)$ 的如下基本公式:

当 $n\geqslant 0$ 时 $\quad a_n(\lambda)=(-1)^n a_n\left(\frac{1}{\lambda}\right).$ (3.1)

当 $n\geqslant 1$ 时 $\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(\lambda)a_{n-k}(\lambda)=(1-n)a_n(\lambda)-na_{n-1}(\lambda).$ (3.2)

当 $n\geqslant 2$ 时 $\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(\lambda)2^k=\lambda n+\lambda^2 a_n(\lambda).$ (3.3)

利用命题 1,我们有

$$\frac{1}{n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}(\lambda)F(k)=\frac{1}{n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k(\lambda)F(n-k)$$

$$=\frac{1}{n\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-k\lambda)\sum_{r=0}^{k-1}\frac{r!S(k-1,r)}{(\lambda-1)^{r+1}}F(n-k)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{r!S(k-1,r)}{(\lambda-1)^{r+1}}F(n-k)$$

$$=-\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}\left(\sum_{r=0}^{s}\frac{r!S(s,r)}{(\lambda-1)^{r+1}}\right)F(n-1-s)$$

$$=-\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}F(m)\sum_{r=0}^{n-1-m}\frac{r!S(n-1-m,r)}{(\lambda-1)^{r+1}}.$$

于是定理 2 可重新表述为

定理 2′ 设 $\lambda\neq 0,1$,则

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\Leftrightarrow f(n)=-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}F(m)\sum_{k=0}^{n-m}\frac{k!S(n-m,k)}{(\lambda-1)^{k+1}}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

我们指出 $\lambda=0$ 时定理 2′依然为真,此时化为经典的二项互反公式.

参 考 文 献

1 徐利治,王兴华,数学分析的方法及例题选讲,北京:高等教育出版社,1983.

2 邵嘉裕,组合数学,上海:同济大学出版社,1991.

3 Louis Comtet (谭明术等译),高等组合学——有限和无限展开的艺术,大连:大连理工大学出版社,1991.

A SUPPLEMENT TO BINOMIAL INVERSION FORMULA

Sun Zhihong

(Huaiyin Normal College)

Abstract Let $\{B_n\}$ and $\{S(n,k)\}$ denote the Bernoulli numbers and the second kind Stirling numbers respectively. The author proves the following inversion formula:

$$F(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(k)-\lambda f(n)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

if and only if

$$f(n)=\begin{cases}-\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}F(m)\sum_{k=0}^{n-m}\frac{k!S(n-m,k)}{(\lambda-1)^{k+1}} & \text{if}\quad \lambda\neq 1,\\ \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}F(k)B_{n+1-k} & \text{if}\quad \lambda=1\end{cases}$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

Keywords Bernoulli numbers, the second kind Stirling numbers, inversion formula.